Адиабата Гюгонио для идеального газа

$$p = \rho RT = \frac{1}{V}\left(\frac{c_p - c_v}{c_v}\right)\cdot c_v T = \frac{1}{V}(\gamma-1)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{pV}{\gamma-1}$$

Адиабата Гюгонио: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(p_1+p_0)(V_0 - V_1)$

$$\frac{p_1 V_1}{\gamma-1} - \frac{p_0 V_0}{\gamma-1} = \frac{1}{2}\left(p_1 V_0 - p_1 V_1 + p_0 V_0 - p_0 V_1\right)$$

$$p_1 V_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right) - p_0 V_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right) = \frac{\gamma-1}{2} p_1 V_0 - \frac{\gamma-1}{2} p_0 V_1 \quad \Big| : p_0$$

$$\frac{p_1}{p_0}\frac{\gamma+1}{2}V_1 - V_0\frac{\gamma+1}{2} = \frac{\gamma-1}{2}\frac{p_1}{p_0}V_0 - \frac{\gamma-1}{2}V_1; \quad \frac{p_1}{p_0}\left(\frac{\gamma+1}{2}V_1 - \frac{\gamma-1}{2}V_0\right) = \frac{\gamma+1}{2}V_0 - \frac{\gamma-1}{2}V_1$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0}$$

Делим исходное ур-е на V_0:

$$\frac{V_1}{V_0}p_1(\gamma+1) - p_0(\gamma+1) = (\gamma-1)p_1 - (\gamma-1)p_0\frac{V_1}{V_0}$$

$$\frac{V_1}{V_0}\left(p_1(\gamma+1) + p_0(\gamma-1)\right) = p_0(\gamma+1) + (\gamma-1)p_1; \quad \frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_0}$$

Адиабата Гюгонио для ид. газа.

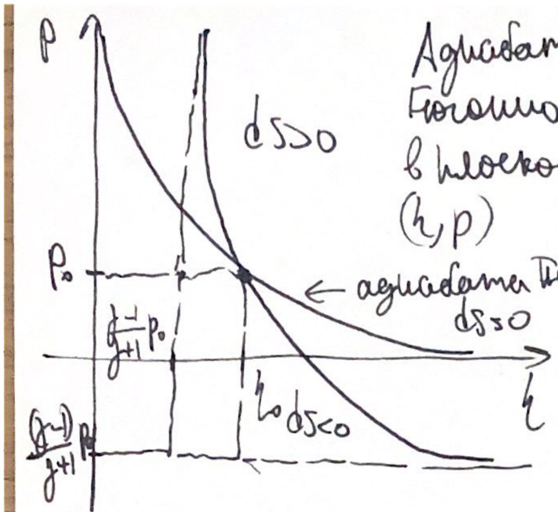
было: $u_0^2 = V_0^2\frac{p_1-p_0}{V_0-V_1}$; $u_1^2 = V_1^2\frac{p_1-p_0}{V_0-V_1}$; $c_0^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0} = \gamma p_0 V_0$; $c_1^2 = \gamma p_1 V_1$

$$\frac{u_0^2}{c_0^2} = V_0^2\frac{p_1-p_0}{V_0-V_1}\cdot\frac{1}{\gamma p_0 V_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\cdot\frac{V_0}{\gamma(V_0-V_1)} = \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}{\left(1-\frac{V_1}{V_0}\right)}$$

$$\frac{u_1^2}{c_1^2} = V_1^2\frac{p_1-p_0}{V_0-V_1}\cdot\frac{1}{\gamma p_1 V_1} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\left(1-\frac{p_0}{p_1}\right)}{\left(\frac{V_0}{V_1}-1\right)}; \quad \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}{\left(1-\frac{(\gamma+1)p_0+(\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\frac{(p_1-p_0)\left((\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_0\right)}{p_0\left((\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_0-(\gamma+1)p_0-(\gamma-1)p_1\right)} \Rightarrow \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{1}{2\gamma}\left((\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}+(\gamma-1)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1^2}{c_1^2} = \frac{1}{2\gamma}\left((\gamma+1)\frac{p_0}{p_1}+(\gamma-1)\right)$$



Адиабата Гюгонио в плоскости (η, p)

$\frac{p_1}{p_0}\to+\infty;\ \frac{\eta_1}{\eta_0}\to\infty;\ \frac{\eta_1}{\eta_0}=\frac{(\gamma+1)+(\gamma-1)\frac{p_1}{p_0}}{(\gamma-1)+(\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}}\to\frac{(\gamma-1)\frac{p_1}{p_0}}{(\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Rightarrow\eta_1=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\eta_0$

$\gamma=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow\eta_1=\frac{1}{4}\eta_0;\ \rho_1=4\rho_0$

$\frac{p_1}{p_0}=\frac{(\gamma+1)-(\gamma-1)\frac{\eta_1}{\eta_0}}{(\gamma+1)\frac{\eta_1}{\eta_0}-(\gamma-1)}\to-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

Адиабата Пуассона: $\frac{p}{\rho^\gamma}=const;\ p_1\eta_1^\gamma=p_0\eta_0^\gamma\Rightarrow\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^\gamma$

Ниже адиаб. П. – зона $ds<0$, выше $ds>0$, на – $ds=0$

1) $p_1>p_0$, $\eta_1<\eta_0\Rightarrow$ давл-е растёт, пл-ть растёт; $\frac{1}{\rho_1}<\frac{1}{\rho_0}\Rightarrow\rho_1>\rho_0\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ударная волна сжатия

2) $p_1<p_0$, $\eta_1>\eta_0$ уд. волна разряжается

Рассм. физ. явл. соотв. всё, что выше адиаб. П. $\Rightarrow$ нет ударных волн разряжения! (запрещено 2 началом термодин.)

Теор. Цемплена: $\exists$ только уд. волны сжатия

II нач. термодин. $dS>0$; $\frac{p_1}{p_0}>1$; $\frac{u_0^2}{c_0^2}=\frac{1}{2\gamma}\left((\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}+(\gamma+1)\right)>$

$>\frac{1}{2\gamma}(\gamma+1+\gamma-1)=1\Rightarrow u_0^2>c_0^2$ $(u_0=D-v_0)$. Фронт уд. волны дв-я, отн-но фона до разрыва со сверхзвуков. ск-тью

$\frac{u_1^2}{c_1^2}=\frac{1}{2\gamma}\left((\gamma+1)\frac{p_0}{p_1}+(\gamma-1)\right)<\frac{1}{2\gamma}(\gamma+1+\gamma-1)=1\Rightarrow u_1^2<c_1^2$

Фронт уд. волны дв-я отн. газа после разрыва (уд. волны) с дозвуковой ск-тью (Приб-е „слабой" волны)

$\frac{p_1}{p_0}\sim1;\ \frac{\eta_1}{\eta_0}=\frac{(\gamma+1)+(\gamma-1)\frac{p_1}{p_0}}{(\gamma+1)\frac{p_1}{p_0}+(\gamma-1)}\cong1;\ c_0\to c_1)$ $\frac{u_0^2}{c_0^2}\to1$ $\frac{u_1^2}{c_1^2}\to1$

Уд. волна беск-но малой интенс-ти, т.е. $\eta_1-\eta_0\to0$

Распростр. со звуковой ск-тью, т.е. вырождается в звуковое возмущение.

Приближение „сильной" волны

$\frac{p_1}{p_0} \to +\infty \Rightarrow p_0$ - (давл-е на фоне) можно пренебречь по сравн-ю с p

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$u_0^2 = \tau_0^2 \Rightarrow \frac{p_1-p_0}{\tau_0-\tau_1} = p_0 \frac{\tau_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}{\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} = \frac{p_0\tau_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}{\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)} \to \frac{p_0\tau_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} =$$

$$= \frac{p_0\tau_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)(\gamma+1)}{\gamma+1-\gamma+1} = \frac{p_0\tau_0}{2}\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)(\gamma+1) \to p_0\tau_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)\frac{\gamma+1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}p_1\tau_0 \to +\infty$$

$$u_0^2 \to +\infty \Rightarrow D^2 \to +\infty \ ; \ D^2 = \frac{\gamma+1}{2}p_1\tau_0 \Rightarrow p_1 = \frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{1}{\tau_0}D^2$$

$$p_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2$$

$$u_0\rho_0 = u_1\rho_1$$

$$u_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1}u_0 = \frac{\tau_1}{\tau_0}u_0 \to \frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_0$$

$$D - v_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(D-v_0)$$

$$v_1 = D\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_0 = \boxed{\frac{2D}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_0 = v_1}$$